3. NÚMEROS RACIONALES.

3.1. Introducción.

Expresiones comunes tales como "un tercio de cerveza", "medio litro de agua", "tres cuartos de kilo de carne", "son las doce y cuarto",... no pueden ser representadas, exclusivamente, mediante un único número natural ni tampoco mediante un único número entero. Esto deja entrever que es necesaria una nueva ampliación de los conjuntos numéricos conocidos.

Desde un punto de vista más matemático, sabemos que siempre podemos realizar la división entre dos números enteros obteniendo un cociente y un resto. Pero es fácil descubrir que no siempre dicha división es exacta (tiene de resto cero), es decir, no podemos afirmar que la división de dos números enteros sea siempre otro número entero. Este hecho justifica también la ampliación del conjunto de los números enteros.

3.2. Conceptos generales.

(A) Una *fracción* es el cociente, razón o división de dos números enteros. El dividendo se llama *numerador* (n^{dor}) y el divisor *denominador* (d^{dor}): $n:d=\frac{n}{d} \quad n,d\in\mathbb{Z}$.

(B) El signo de una fracción viene dado mediante la "regla de los signos":

$\frac{7}{4}$	$\frac{+}{+} \rightarrow$ fracción positiva	$\frac{-7}{-4}$	$\frac{-}{-} \rightarrow$ fracción positiva	*Si los dos signos son iguales la fracción es +*
$\frac{7}{-4}$	$\frac{+}{-} \rightarrow$ fracción negativa	$\frac{-7}{4}$	$\frac{-}{+} \rightarrow$ fracción negativa	*Si los dos signos son distintos la fracción es -*

Es importante llamar la atención sobre el siguiente hecho:

$$-\frac{2}{5}=\frac{-2}{5}=\frac{2}{-5}=-0'4\neq 0'4=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}$$

Es decir:

* No es igual poner un signo menos en la fracción que no ponerlo.

* No es igual poner un signo menos delante de la fracción que ponerlo en el n^{dor} ***y*** en el d^{dor}.

* Sí es igual poner el signo menos delante, en el n^{dor} ***o*** en el d^{dor} de la fracción. Por tanto, siempre lo colocaremos en el n^{dor} de la misma que es donde menos confusión provoca y simplifica la escritura de las fracciones.

Ejercicio: Clasifica las siguientes fracciones en positivas y negativas, simplificando su escritura.

$$\frac{2}{3},-\frac{4}{5},\frac{-7}{-2},\frac{11}{5},\frac{4}{-6},\frac{9}{7},\frac{-3}{-4},\frac{-1}{8},-\frac{13}{12},\frac{-11}{-3},-\frac{2}{3},\frac{-5}{12},\frac{8}{-7},\frac{-12}{-5},\frac{15}{20},\frac{9}{-7},-\frac{6}{2},-\frac{-5}{9},-\frac{-1}{-10},-\frac{4}{-17}$$

POSITIVAS											
NEGATIVAS											

(C) Una fracción mayor o menor que la unidad se distingue de la siguiente forma:

Si la fracción es positiva:

$\frac{7}{4}$=1'75	7>4 6 fracción mayor que la unidad	*Si el n*[dor] *es mayor que el d*[dor]*, la fracción es mayor que la unidad*
$\frac{5}{11}$=0'45...	5<11 6 fracción menor que la unidad	*Si el n*[dor] *es menor que el d*[dor]*, la fracción es menor que la unidad*

Si la fracción es negativa, se estudia como si fuera positiva y luego se concluye lo contrario:

$\frac{-7}{4}$ = -1'75 6 $\frac{7}{4}$ fracción mayor que la unidad 6 $\frac{-7}{4}$ fracción menor que la unidad (negativa)
$\frac{5}{-11}$ = -0'45... 6 $\frac{5}{11}$ fracción menor que la unidad 6 $\frac{-5}{11}$ fracción mayor que la unidad (negativa)

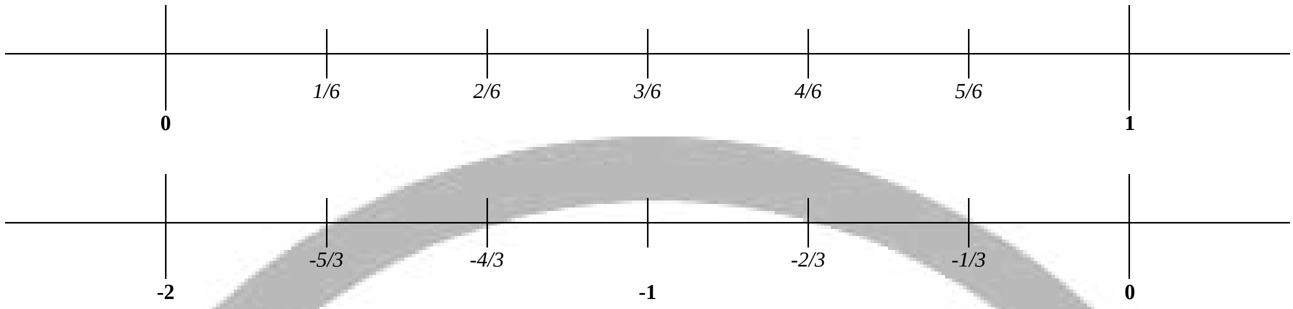
Ejercicio: Clasifica las siguientes fracciones en mayores o menores que la unidad.

$$\frac{2}{3},-\frac{4}{5},\frac{-7}{-2},\frac{11}{5},\frac{4}{6},\frac{9}{7},\frac{-3}{-4},\frac{-1}{8},-\frac{13}{12},\frac{-11}{-3},-\frac{10}{3},\frac{-5}{12},\frac{6}{7},\frac{-12}{-5},\frac{15}{20},\frac{9}{-7},-\frac{6}{2},\frac{5}{9},\frac{-1}{10},\frac{24}{17}$$

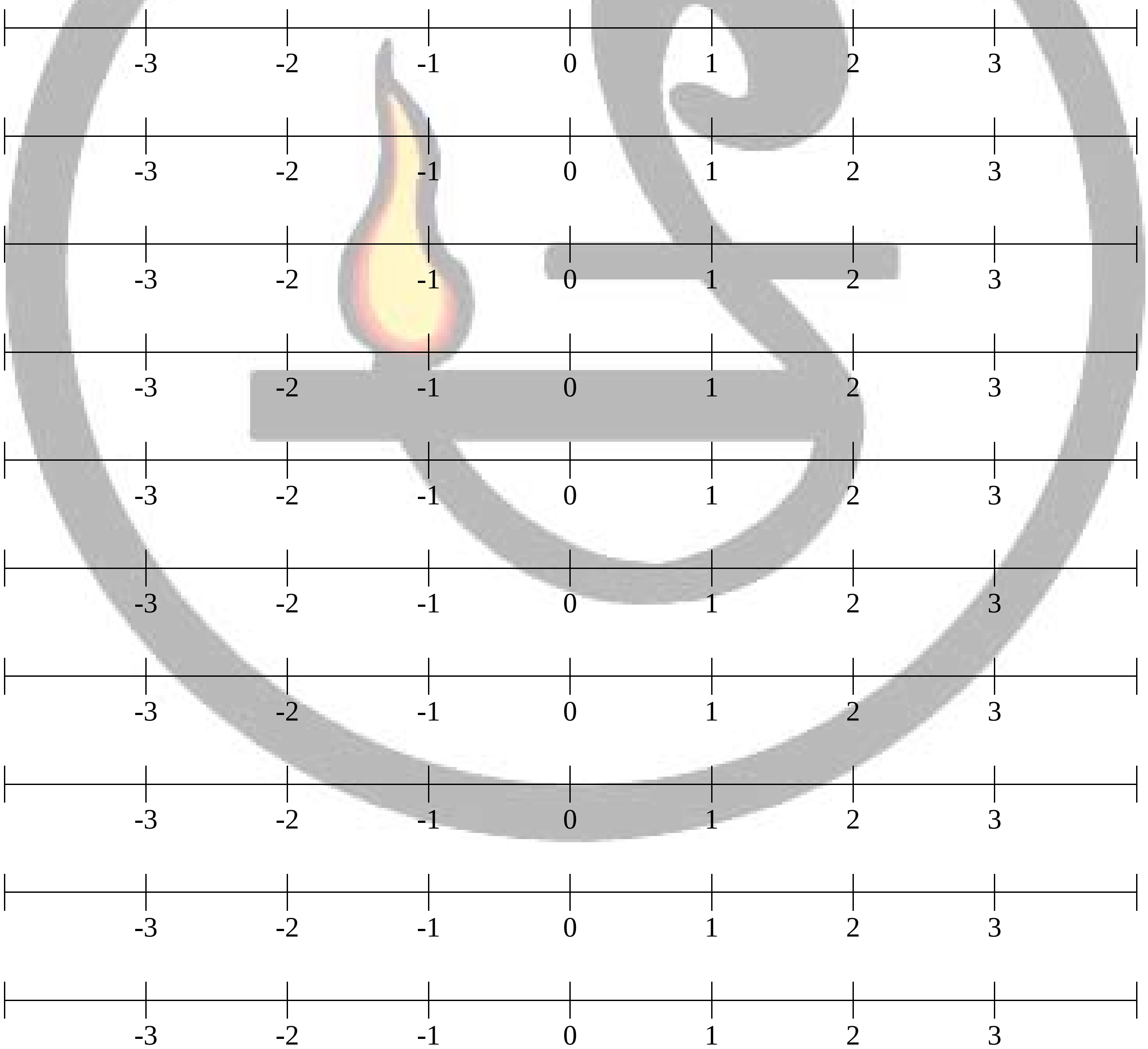
MAYORES que la UNIDAD											
MENORES que la UNIDAD											

3.3. Representación gráfica de fracciones.

El d^{dor} indica el nº de partes en que dividimos la unidad y el n^{dor} el nº de partes que tomamos.



Ejercicio: Representa gráficamente $-\frac{4}{5}, \frac{-7}{-2}, \frac{11}{5}, \frac{9}{7}, \frac{-3}{-4}, \frac{-1}{8}, -\frac{10}{3}, \frac{6}{7}, -\frac{6}{2}, \frac{5}{9}$



3.4. Equivalencia de fracciones.

Dos *fracciones* son *equivalentes* si el producto del n^{dor} de la primera por el d^{dor} de la segunda es igual que el producto del d^{dor} de la primera por el n^{dor} de la segunda.

$\frac{2}{3}\equiv\frac{4}{6}$ *porque* $\begin{cases}2\cdot 6=12\\ 3\cdot 4=12\end{cases}$	$\frac{-18}{15}\equiv\frac{6}{-5}$ *porque* $\begin{cases}-18\cdot(-5)=90\\ 15\cdot 6=90\end{cases}$	*Equivalentes*
$\frac{9}{-7}\not\equiv\frac{4}{-5}$ *porque* $\begin{cases}9\cdot(-5)=-45\\ -7\cdot 4=-28\end{cases}$	$\frac{8}{3}\not\equiv\frac{4}{9}$ *porque* $\begin{cases}8\cdot 9=72\\ 3\cdot 4=12\end{cases}$	*No equivalentes*

Hay casos en los que podemos decidir que dos fracciones NO son equivalentes sin hacer cuentas:

Si una es positiva y la otra negativa	$\frac{7}{6}\not\equiv\frac{-7}{6}$ *porque* $\begin{cases}\frac{7}{6}>0\\ \frac{-7}{6}<0\end{cases}$ $\begin{pmatrix}7\cdot 6=42\\ 6\cdot(-7)=-42\end{pmatrix}$
Si una es mayor que la unidad y la otra menor	$\frac{11}{5}\not\equiv\frac{4}{9}$ *porque* $\begin{cases}\frac{11}{5}>1\\ \frac{4}{9}<1\end{cases}$ $\begin{pmatrix}11\cdot 9=99\\ 5\cdot 4=20\end{pmatrix}$

Para obtener fracciones equivalentes a una dada, multiplicamos o dividimos el numerador y el denominador por un mismo nº:

$\frac{8}{-5}\xrightarrow[\bullet(-1)]{\bullet(-1)}\frac{-8}{5}\xrightarrow[\bullet 2]{\bullet 2}\frac{-16}{10}\xrightarrow[\bullet(-6)]{\bullet(-6)}\frac{96}{-60}\xrightarrow[:3]{:3}\frac{32}{-20}$	$\frac{40}{100}\xrightarrow[:2]{:2}\frac{20}{50}\xrightarrow[\bullet 7]{\bullet 7}\frac{140}{350}\xrightarrow[:10]{:10}\frac{14}{35}\xrightarrow[\bullet 3]{\bullet 3}\frac{42}{105}$

Un *número racional* es el conjunto formado por una fracción y todas sus equivalentes. El conjunto de los números racionales se representa por la letra $\mathbb{Q}$.

3.5. Simplificación de fracciones.

Simplificar una fracción consiste en dividir el n^{dor} y el d^{dor} por un divisor común de ambos.

* Descomposición en factores: $-\frac{40}{100}=\frac{-40}{100}=\frac{(-1)\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot\cancel{5}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 5\cdot\cancel{5}}=\frac{-2}{5}$

* M.c.d.: $\frac{40}{100}=\frac{40:20}{100:20}=\frac{2}{5}$ *porque* $\left.\begin{matrix}40=2^3\cdot 5\\ 100=2^2\cdot 5^2\end{matrix}\right\}n\Rightarrow nmcd(40,100)=2^2\cdot 5=4\cdot 5=20$

* Divisiones sucesivas: $\frac{-40}{-100}=\frac{40}{100}\xrightarrow[:2]{:2}\frac{20}{50}\xrightarrow[:2]{:2}\frac{10}{25}\xrightarrow[:5]{:5}\frac{2}{5}$

El *representante canónico* de una fracción es aquella fracción que no se puede simplificar más (*fracción irreducible*), es decir, el n^{dor} y el d^{dor} son primos entre sí (su máximo común divisor es 1).

Ejercicio: Decidir si los siguientes pares de fracciones son equivalentes o no.

FRACCIONES	EQUIVALENCIA		POR QUÉ
$\frac{4}{12}$ y $\frac{-4}{-12}$			
$\frac{-4}{12}$ y $\frac{4}{12}$			
$-\frac{4}{12}$ y $\frac{-4}{-12}$			
$\frac{4}{12}$ y $\frac{12}{4}$			
$\frac{-4}{-12}$ y $\frac{2}{6}$			
$\frac{4}{12}$ y $\frac{1}{4}$			
$\frac{24}{35}$ y $\frac{120}{175}$			
$\frac{-17}{64}$ y $\frac{85}{-192}$			
$\frac{37}{50}$ y $-\frac{185}{250}$			
$\frac{6}{7}$ y $\frac{70}{105}$			
$\frac{-6}{7}$ y $\frac{-90}{105}$			
$\frac{7}{-5}$ y $\frac{14}{10}$			
$\frac{9}{15}$ y $\frac{-6}{-10}$			
$\frac{6}{-9}$ y $-\frac{50}{75}$			

Ejercicio: Simplificar las siguientes fracciones.

FRACCIÓN	REPRESENTANTE CANÓNICO	FRACCIÓN	REPRESENTANTE CANÓNICO
$\frac{21}{35}$		$-\frac{21}{35}$	
$\frac{-24}{-80}$		$\frac{-24}{80}$	
$\frac{14}{69}$		$\frac{85}{192}$	
$\frac{27}{24}$		$\frac{17}{-81}$	
$\frac{120}{-175}$		$\frac{185}{250}$	
$\frac{-37}{50}$		$\frac{22}{33}$	
$\frac{15}{64}$		$-\frac{81}{129}$	
$\frac{44}{-80}$		$\frac{-13}{39}$	
$-\frac{14}{18}$		$\frac{162}{-54}$	
$\frac{117}{-78}$		$\frac{-36}{-28}$	
$\frac{-342}{285}$		$\frac{111}{228}$	
$\frac{528}{-253}$		$\frac{-123}{360}$	
$\frac{3080}{-231}$		$\frac{102}{3600}$	
$-\frac{9009}{1050}$		$\frac{-3102}{8415}$	
$\frac{5292}{9702}$		$\frac{-1274}{-3458}$	

3.6. Reducción de fracciones a común denominador. Orden.

En ocasiones, es necesario transformar el aspecto de una fracción para verla de forma que tenga el mismo denominador o el mismo numerador que otra. De esta manera se podrán comparar o se podrán sumar o restar. En esto consiste reducir fracciones a común denominador: escribirlas todas con el mismo denominador pero sin cambiar las fracciones, es decir, escribir fracciones equivalentes a las que tenemos pero de forma que tengan todas el mismo denominador. Para ello:

(A) Se calcula el mínimo común múltiplo de los d^{dores} y se pone como d^{dor} de todas las fracciones.

$$\frac{-14}{45} \quad y \quad \frac{17}{12} \;\; Y \;\; \text{mcm}(45,12) = \text{mcm}(\underline{3^2}\cdot\underline{5},\underline{2^2}\cdot 3) = 2^2\cdot 3^2\cdot 5 = 180 \;\; Y \;\; \frac{?}{180} \quad y \quad \frac{?}{180}$$

(B) Se divide el d^{dor} común entre cada uno de los d^{dores} y el resultado se multiplica por el n^{dor}:

$$\frac{-14\cdot 4}{45\cdot 4} = \frac{-14\cdot 4}{180} \quad y \quad \frac{17\cdot 15}{12\cdot 15} = \frac{17\cdot 15}{180} \quad \Rightarrow \quad \frac{-56}{180} \quad y \quad \frac{255}{180}$$

(C) ORDEN. Para ordenar fracciones seguimos los siguientes pasos:

1º Se reducen a común denominador.

2º Si las fracciones son positivas, es mayor la que tiene el numerador mayor.

3º Si son negativas, se estudian como si fueran positivas y se concluye lo contrario.

$\frac{7}{15}$ y $\frac{13}{21}$	$\frac{12}{5}$ y $\frac{21}{12}$	$-\frac{7}{6}$ y $\frac{13}{-12}$	$-\frac{3}{5}, \frac{-7}{15}$ y $\frac{1}{-9}$
$\frac{49}{105}$ y $\frac{91}{105}$	$\frac{144}{60}$ y $\frac{105}{60}$	$\frac{-28}{24}$ y $\frac{-26}{24}$	$\frac{-27}{45}, \frac{-21}{45}$ y $\frac{-5}{45}$
$\frac{91}{105} > \frac{49}{105}$	$\frac{144}{60} > \frac{105}{60}$	$\frac{-28}{24} < \frac{-26}{24}$	$\frac{-5}{45} > \frac{-21}{45} > \frac{-27}{45}$
$\frac{13}{21} > \frac{7}{15}$	$\frac{12}{5} > \frac{21}{12}$	$-\frac{7}{6} < \frac{13}{-12}$	$\frac{1}{-9} > \frac{-7}{15} > -\frac{3}{5}$

Hay casos en los que podemos decidir el orden las fracciones sin hacer cuentas:

Si una es positiva y la otra negativa	$\frac{7}{6} > \frac{-9}{5}$	$\frac{-3}{4} < \frac{11}{2}$	$\frac{-3}{2} < \frac{-5}{6} < \frac{1}{9} < \frac{8}{3}$
Si una es mayor que la unidad y la otra menor	$\frac{4}{9} < \frac{11}{5}$	$\frac{13}{8} > \frac{6}{11}$	
Si todas tienen el mismo numerador	$\frac{4}{7} < \frac{4}{5}$	$\frac{13}{4} > \frac{13}{10}$	$\frac{-4}{5} < \frac{-4}{7} < \frac{-4}{11}$

Ejercicio: Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor.

FRACCIONES	SOLUCIÓN		
a) $\frac{7}{15},\frac{3}{12}$			
b) $-\frac{9}{6},\frac{7}{-4}$			
c) $\frac{3}{2},\frac{9}{10}$			
d) $\frac{-2}{7},\frac{13}{21}$			
e) $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$			
f) $\frac{-3}{5},\frac{7}{10},\frac{9}{2}$			
g) $\frac{5}{12},\frac{9}{16},\frac{13}{18}$			
j) $-\frac{5}{18},\frac{-4}{9},\frac{-7}{-16},\frac{15}{-20}$			

Ejercicio: Ordena las siguientes fracciones de mayor a menor.

FRACCIONES	SOLUCIÓN		
a) $\frac{-11}{18},\frac{-8}{15}$			
b) $\frac{8}{9},\frac{3}{5}$			
c) $-\frac{6}{5},\frac{14}{-17}$			
f) $\frac{4}{-7},-\frac{11}{5},\frac{7}{3}$			
g) $\frac{7}{12},\frac{5}{6},\frac{4}{9}$			
h) $\frac{-7}{12},\frac{23}{-15},-\frac{11}{25}$			
i) $\frac{5}{-6},\frac{7}{12},\frac{19}{15},-\frac{13}{8}$			
j) $\frac{15}{8},\frac{-9}{-4},\frac{17}{6},\frac{21}{10}$			

3.7. Expresión decimal de un número racional.

La *expresión decimal* de un nº racional se obtiene dividiendo el n^{dor} entre el d^{dor} de la fracción.

Nos podemos encontrar los siguientes tipos de decimales, todos ellos *periódicos* (existe un bloque de cifras decimales que se repiten, siempre las mismas y en el mismo orden) ya que, para que la división esté bien hecha, el resto tiene que ser menor que el divisor y, por tanto, o es cero o se acaban repitiendo los restos, en cuyo caso también se repiten los cocientes:

(A) Exactos: en la división aparece un resto parcial nulo.

$$\frac{3}{4}=0'75 \qquad \frac{-142}{25}=-5'68 \qquad \frac{173}{8}=21'625 \qquad \frac{-9}{500}=-0'018$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 20 & 0'75 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 142 & 25 \\ \hline 170 & 5'68 \\ 200 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 173 & 8 \\ \hline 13 & 21'625 \\ 50 & \\ 20 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 900 & 500 \\ \hline 4000 & 0'018 \\ 0 & \end{array}$$

(B) Periódicos puros: las cifras del cociente se repiten en bloques iguales desde la coma.

$$\frac{1}{3}=0'333...=0'\overset{\frown}{3} \qquad \frac{-14}{11}=-1'2727...=-1'\overset{\frown}{27} \qquad \frac{142}{999}=0'\overset{\frown}{142} \qquad -\frac{58}{33}=-1'\overset{\frown}{75}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \hline 10 & 0'333... \\ 10 & \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14 & 11 \\ \hline 30 & 1'2727... \\ 80 & \\ 30 & \\ 8 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1420 & 999 \\ \hline 4210 & 0'142142... \\ 2140 & \\ 142 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 58 & 33 \\ \hline 250 & 1'7575... \\ 190 & \\ 25 & \end{array}$$

C) Periódicos mixtos: las cifras del cociente se repiten en bloques iguales pero no desde la coma.

$$\frac{5}{6}=0'833...=0'8\overset{\frown}{3} \qquad \frac{-17}{12}=-1'4166...=-1'41\overset{\frown}{6} \qquad \frac{3517}{495}=7'1\overset{\frown}{05} \qquad -\frac{47}{18}=-2'6\overset{\frown}{1}$$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 6 \\ \hline 20 & 0'833... \\ 20 & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17 & 12 \\ \hline 50 & 1'4166... \\ 20 & \\ 80 & \\ 8 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3517 & 495 \\ \hline 0520 & 7'10505... \\ 02500 & \\ 025 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 47 & 18 \\ \hline 110 & 2'611... \\ 020 & \\ 02 & \end{array}$$

En todo número decimal se distinguen tres partes:

$$123'426832234234... = 123'426832\widehat{234} \Rightarrow \begin{cases} \text{Parte entera: } \mathbf{123} \\ \text{Parte decimal: } \mathbf{426832\widehat{234}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Anteperiodo: } \mathbf{426832} \\ \text{Periodo: } \mathbf{234} \end{cases} \end{cases}$$

Es importante hacer notar, que los números naturales y enteros también podemos verlos como números decimales periódicos puros de periodo cero:

$$31 = 31'000... = 31'\widehat{0}; \quad -17 = -17'000... = -17'\widehat{0}$$

Asimismo, los números decimales exactos podemos verlos como números decimales periódicos mixtos de periodo cero:

$$19'26 = 19'26000... = 19'26\widehat{0}; \quad -7'3 = -7'3000... = -7'3\widehat{0}$$

De esta forma, todos los números conocidos hasta ahora son decimales periódicos y, por tanto, también podemos definir un *número racional* como un número decimal periódico. Además, queda definida la siguiente relación entre los conjuntos estudiados hasta ahora: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

3.8. Expresión racional de los números decimales periódicos.

Al igual que todas las fracciones tienen una expresión decimal periódica, todos los números decimales periódicos pueden escribirse en forma de fracción. De hecho, hay infinitas fracciones que dan lugar a un número decimal periódico (todas las que sean equivalentes). Pues bien, de todas ellas hay una que es irreducible y que se llama *fracción generatriz* del número decimal periódico. Vamos a estudiar el procedimiento para escribir un decimal periódico en forma de fracción y, para hallar la fracción generatriz, lo único que tenemos que hacer es simplificar dicha fracción.

(A) Exactos: $\dfrac{\text{nº sin coma}}{\text{1 seguido de tantos 0 como cifras decimales}}$

Nº decimal periódico	*Expresión racional*	*Fracción generatriz*	*Nº decimal periódico*	*Expresión racional*	*Fracción generatriz*
$0'25$			$72'324$		
$-15'3$			$-2'75$		
$-12'4$			$7'005$		
$1'125$			$-0'91$		

(B) Periódicos puros: $\dfrac{n^o \text{ sin coma } - \text{ parte entera}}{\text{tantos 9 como cifras del periodo}}$

Nº decimal periódico	*Expresión racional*	*Fracción generatriz*	*Nº decimal periódico*	*Expresión racional*	*Fracción generatriz*
$0'\overset{\frown}{27}$			$2'\overset{\frown}{303}$		
$-15'\overset{\frown}{3}$			$-2'\overset{\frown}{75}$		
$-12'\overset{\frown}{4}$			$0'\overset{\frown}{285714}$		
$0'\overset{\frown}{10}$			$-7'\overset{\frown}{9}$		

(C) Periódicos mixtos: $\dfrac{n^o \text{ sin coma } - \text{ parte entera y anteperiodo}}{\text{tantos 9 como cifras del periodo y tantos ceros como cifras del anteperiodo}}$

Nº decimal periódico	*Expresión racional*	*Fracción generatriz*	*Nº decimal periódico*	*Expresión racional*	*Fracción generatriz*
$0'2\overset{\frown}{5}$			$10'12\overset{\frown}{3}$		
$0'0\overset{\frown}{12}$			$-11'9\overset{\frown}{3}$		
$-3'1\overset{\frown}{6}$			$7'1\overset{\frown}{05}$		
$-1'41\overset{\frown}{6}$			$-15'1\overset{\frown}{9}$		

Las dos utilidades del cálculo de la fracción generatriz de un número decimal periódico son:

a) Intentar (si el d^{dor} es pequeño) dibujar dicho nº decimal en la recta real con mayor precisión
b) Realizar operaciones en las que aparecen dichos n^{os} ya que, si no los pasamos a forma de fracción, no podemos operar con ellos (salvo de forma aproximada), mientras que en forma de fracción podemos operar perfectamente (con total exactitud). En este caso debemos terminar la operación expresando el resultado en forma decimal (como nos lo daban).